МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

Из предмета Вероватноћа и математичка статистика

Теорија вероватноће и њене примене

Ученик

Катарина Лукић, 4д

Ментор

Гордана Ћетковић

Београд, јун 2013.

Садржај

Резиме

Циљ овог рада је да прикаже основне појмове теорије вероватноће као што су условна вероватноћа, потпуна вероватноћа и Бајесова формула, али и њене разноврсне примене у другим наукама. Током израде рада користила сам званичне методе пронађене у литератури. Највећи део рада чине примери из праксе где се види како се теорија вероватноће успешно примењује, не само у математици, већ и у информатици, телекомуникацијама, теорији поузданости, биологији, медицини, а и у свакодневном животу.

***Кључне речи*:** теорија вероватноће, условна вероватноћа, потпуна вероватноћа, Бајесова формула, примене вероватноће

Увод

У свакодневном животу често чујемо исказе и питања која у себи садрже речи вероватноћа, шанса, могућност или учесталост:

– Метеоролог каже да је вероватноћа да ће сутра падати киша 80%;

– Лекари кажу да се повећава учесталост пушача који обољевају од рака плућа;

– Студент се пита да ли постоји могућност да добије оцену 10, иако није марљиво учио;

– Политичар се пита има ли шансе да ће на изборима да победи његова странка.

Теорија вероватноће је грана примењене математике која нам даје одговоре на ова, али и многа друга питања. Почела је да се развија у шеснаестом веку када је жеља за брзом и лаком зарадом навела многе страствене коцкаре и математичаре на размишљање како треба да играју и улажу новац и колика је њихова шанса да победе.

Значајан допринос теорији вероватноће дао је италијански математичар Girolamo Cardano својим делом „О игри коцком” у којем наводи резултате до којих је дошао као и савете за успешно варање у коцкарским играма. Pierre de Fermat и Blaise Pascal су својом преписком решавали проблем „подела улога” чија је сврха поштена подела уложеног новца приликом прекида коцкарске игре. Christiaan Huygens излагању вероватноће даје научни карактер, а Jacob Bernoulli у свом делу „Уметност погађања” излаже дотадашње резултате и доказује неке значајне теореме. Abraham de Moivre уводи појам случајног догађаја док Pierre Simon Laplace у делу „Аналитичка теорија вероватноће” дефинише појам математичког очекивања и доказује низ тврђења која се у непромењеном облику користе и данас.

Теорија вероватноће се даље развијала као мултидисциплинарна наука користећи различита знања из других области. Временом је заузела кључну улогу у решавању многих проблема, а данас се сматра једном од најзначајнијих грана математике.

Глава 1. Теорија вероватноће

1.1. Основни појмови и класична дефиниција вероватноће

Случајни физички експеримент (*опит*) је експеримент чији се исход не може са сигурношћу предвидети и који се може понављати неограничен број пута. Његове исходе називамо *елементарним догађајима* и означавамо их са ω_i, $i \in \mathbb{N}$. Скуп свих елементарних догађаја је *сигуран догађај* или *простор исхода* и означава се са Ω. Сваки подскуп A скупа Ω назива се *догађај*. Сви елементарни догађаји ω_i који су елементи скупа A зову се и *повољни исходи* за догађај A. Број повољних исхода догађаја A уједно је и кардинални број (број елемената) скупа A, а означавамо га са $|A|$. Догађаји се најчешће обележавају великим словима латинице. Немогућ догађај је догађај који нема повољних исхода и он има ознаку празног скупа $\emptyset$.

Дефиниција: Нека је $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Узмимо да су сви исходи једнаковероватни. Тада сваком исходу ω_j, где је $1 \le j \le n$, додељујемо број $\frac{1}{n}$ који називамо његова вероватноћа и означавамо са $P(\omega_j) = \frac{1}{n}$. Случајном догађају $A = \left\{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_k}\right\}$, где је $1 \le k \le n$, тада додељујемо као његову вероватноћу број $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n}$.

Ова дефиниција је позната под називом *класична дефиниција вероватноће* или *Лапласова дефиниција вероватноће*. Увео ју је маркиз Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), француски математичар и астроном, у књизи „Аналитичка теорија вероватноће”, 1812. године. Наглашавамо да је веома битно да су сви исходи ω_j једнаковероватни да бисмо могли да примењујемо Лапласову дефиницију вероватноће. У супротном, могли бисмо погрешити као познати француски математичар Jean le Rond D'Alembert (1717 – 1783) који је 1754. године посматрао два новчића и догађај A да је пало бар једно писмо при истовременом бацању тих новчића. Он је сматрао да је скуп свих исхода $\Omega = \{0, 1, 2\}$ зато што је могуће да падну два, једно или ниједно писмо и да је $A = \{1, 2\}$ односно да је $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{3}$. Ово је погрешан закључак зато што елементарни исходи у простору исхода Ω нису једнаковероватни. Уместо овог простора исхода требало је да посматра простор исхода $\Omega = \{ПП, ПГ, ГП, ГГ\}$ и догађај $A = \{ПП, ПГ, ГП\}$ одакле је $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$.

Нека од основних својстава вероватноће су:

1. $P(\Omega) = 1$ (*нормираност*);

<u>Доказ</u>: Ако је A сигуран догађај односно $A = \Omega$ и $|\Omega| = n,\ n \in \mathbb{N}$, на основу класичне дефиниције вероватноће следи да је $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n}{n} = 1$.

2. $P(\emptyset) = 0$;

<u>Доказ</u>: Ако је A немогућ догађај односно $A = \emptyset$ и $|\Omega| = n,\ n \in \mathbb{N}$, на основу класичне дефиниције вероватноће следи да је $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{0}{n} = 0$.

3. $(\forall A)\ (P(A) \geq 0)$ (*ненегативност*);

<u>Доказ</u>: 1° Ако је A немогућ догађај односно $A = \emptyset$, онда је $P(A) = 0$ (својство 2);

2° Ако је $A \neq \emptyset$, нека је тада број повољних исхода догађаја A једнак k. Следи да је $k > 0$.

Како је $|\Omega| = n$ и важи да је $n > 0$ следи $P(A) = \frac{k}{n} > 0$.

Из 1° и 2° следи да је $P(A) \geq 0$.

4. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, где је $\overline{A}$ догађај супротан догађају A, односно $\overline{A} = \Omega \backslash A$.

<u>Доказ</u>: Ако је $|A| = k_A$ и $|\overline{A}| = k_{\overline{A}}$, важи да је $k_A + k_{\overline{A}} = n$ где је $|\Omega| = n,\ n \in \mathbb{N}$.

Следи да је $P(A) + P(\overline{A}) = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = \frac{k_A}{n} + \frac{k_{\overline{A}}}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (*адитивност*);

<u>Доказ</u>: Означимо са k_A број повољних исхода догађаја A, са k_B број повољних исхода догађаја B, са k_{AB} број повољних исхода догађаја $A \cap B$, а са k број повољних исхода догађаја $A \cup B$. Тада, на основу формуле за број елемената уније скупова A и B, важи да је $k = k_A + k_B - k_{AB}$, а како је $|\Omega| = n$ следи да је:

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{k}{n} = \frac{k_A + k_B - k_{AB}}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Последица: Нека су догађаји A и B дисјунктни. Тада је $A \cap B = \emptyset$, односно $P(A \cap B) = 0$. На основу својства адитивности следи да важи $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

1.2. Аксиоме теорије вероватноће

Да бисмо се упознали са аксиоматским заснивањем теорије вероватноће, морамо дефинисати једну структуру у оквиру простора елементарних исхода.

Дефиниција 1: Нека је S непразан скуп и F непразна фамилија подскупова од S таква да:

I Из $A \in F$ следи $\overline{A} \in F$.

II Из $A_1, A_2 \in F$ следи $(A_1 \cup A_2) \in F$.

Тада је фамилија F *поље скупова* или *алгебра скупова*. Ако је $S = \Omega$ простор исхода случајног експеримента, тада је F *поље случајних догађаја* или *алгебра случајних догађаја*.

Из дефиниције поља следе особине:

1° $S, \emptyset \in F$.

2° Из $A_1, A_2, ..., A_n \in F$ следи $(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \in F$.

3° Фамилија $F_1 = \{S, \emptyset\}$ је поље (такозвано тривијално поље).

4° Фамилија $F_2 = \{S, \emptyset, A, \overline{A}\}$, где је A подскуп од S, је поље.

5° Партитивни скуп је поље.

6° Нека је S бесконачан скуп (пребројив или непребројив). Фамилија F_3 подскупова од S, који су коначни или чији су комплементи коначни, је поље.

7° У услову II у дефиницији поља уместо уније може се узети пресек, односно услов II се може заменити са II' Из $A_1, A_2 \in F$ следи $(A_1 \cap A_2) \in F$.

Кроз теореме које следе упознаћемо се са операцијама које се могу вршити над пољима и начинима на које се могу формирати поља полазећи од одређених фамилија подскупова датог скупа.

<u>Теорема 1</u>: Нека је J непразан скуп индекса (коначан или бесконачан – пребројив или непребројив) и нека су F_j, где је $j \in J$, поља из истог скупа S. Тада важи да је и њихов пресек $F = \bigcap_{j \in J} F_j = \{A \mid A \in F_j, j \in J\}$ поље подскупова.

Доказ: 1° Ако је $A \in F$, онда $A \in F_j$ за све $j \in J$. Одавде важи $\overline{A} \in F_j$ за све $j \in J$ па и $\overline{A} \in F$.

2° Ако су A_1 и A_2 из F, онда су и A_1 и A_2 из F_j за све $j \in J$, одакле је и $(A_1 \cup A_2)$ из F_j за све $j \in J$ односно $(A_1 \cup A_2) \in F$.

Из 1° и 2° следи да је F поље јер задовољава оба услова дата у дефиницији 1.

Теорема 2: Нека је C произвољна фамилија подскупова скупа S. Тада постоји јединствено одређено минимално поље $F(C)$ које садржи фамилију C и оно се назива поље генерисано фамилијом C.

Доказ: Партитивни скуп скупа S је поље и оно садржи фамилију C. Нека су $F_j(C)$, $j \in J$, поља која садрже фамилију C. Нека је $F(C) = \bigcap_{j \in J} F_j(C)$ њихов пресек. На основу теореме 1 следи да је и $F(C)$ поље и оно садржи фамилију C. Претпоставимо да $F(C)$ није минимално поље него да је то неко друго поље $F'(C)$. Међутим, како би тада и $F(C) \cap F'(C)$ било поље које садржи фамилију C и важи $(F(C) \cap F'(C)) \subset F'(C)$, добијамо контрадикцију. Следи да је $F(C)$ минимално поље које садржи фамилију C.

Из дефиниције 1 се уочава да ако је простор исхода коначан, произилази да је поље случајних догађаја коначно и затворено у односу на комплементе, пресеке и уније. Одговор на питање шта се мења када посматрамо бесконачан простор исхода и унију пребројиво много подскупова даје нам дефиниција која следи.

Дефиниција 2: Нека је S непразан скуп. Фамилија $\mathcal{A}$ подскупова од S за коју важи услов I из дефиниције поља и услов II* из $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ следи $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \in \mathcal{A}$ назива се *σ – поље* или *σ – алгебра подскупова* од S. Ако је $S = \Omega$ простор исхода, тада је σ – поље $\mathcal{A}$ *поље случајних догађаја* или *σ – алгебра случајних догађаја*.

Из дефиниције σ – поља следе особине:

1° $S \in \mathcal{A}$, $\emptyset \in \mathcal{A}$.

2° Свако σ – поље је поље, обрнуто није тачно.

3° $\mathcal{A}_1 = \{S, \emptyset\}$ је σ – поље (такозвано тривијално σ – поље).

4° Партитивни скуп је σ – поље.

5° Ако је $\emptyset \subset B \subset S$ онда је $\mathcal{A}_2 = \{S, \emptyset, B, \overline{B}\}$ σ – поље.

6° Ако је S непребројив скуп и $\mathcal{A}_3$ фамилија његових подскупова S који су пребројиви или чији су комплементи пребројиви, онда је $\mathcal{A}_3$ σ – поље.

7° У услову II* у дефиницији σ – поља уместо уније може се узети пресек, односно услов II* се може заменити са II'' Из $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ следи $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots) \in \mathcal{A}$.

Теореме које следе и које наводим без доказа, аналогне су теоремама 1 и 2.

<u>Теорема 3</u>: Нека је J непразан скуп индекса и F_j, $j \in J$, су σ – поља. Тада је и њихов пресек

$F = \bigcap_{j \in J} F_j = \{A \mid A \in F_j, j \in J\}$ σ – поље.

<u>Теорема 4</u>: Нека је C произвољна фамилија подскупова скупа S. Тада постоји јединствено одређено минимално σ – поље $F(C)$ генерисано фамилијом C.

Да бисмо формално дефинисали појам вероватноће потребан нам је још појам мерљивог простора који уводимо у дефиницији која следи.

Дефиниција 3: Ако је S непразан скуп и $\mathcal{A}$ σ – поље подскупова од S, уређени пар $(S, \mathcal{A})$ је *мерљив простор*, а његови елементи су *мерљиви скупови*. Ако је $S = \Omega$ простор исхода случајног експеримента, тада је уређени пар $(\Omega, \mathcal{A})$ *мерљив простор случајних догађаја*.

Дефиниција вероватноће: Функција P: $\mathcal{A} \to$ R је *вероватноћа* на мерљивом простору исхода $(\Omega, \mathcal{A})$ ако задовољава следеће три аксиоме:

Аксиома 1. $P(B) \geq 0$ за сваки догађај $B \in \mathcal{A}$.

Аксиома 2. $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 3. Ако су $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ и у паровима су дисјунктни, односно за различите j и k је $A_j \cap A_k = \emptyset$, онда је $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

Уређена тројка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ зове се *простор вероватноћа*, а број P(A) вероватноћа догађаја A.

Ова аксиоматика је позната као *аксиоматика Колмогорова* и потиче из 1933. године. Дефинисао ју је велики руски математичар Андреи Николаевич Колмогоров (1903 – 1987).

На основу наведених аксиома могу се извести следеће особине вероватноће:

1˚ $P(\emptyset) = 0$.

2˚ Коначна адитивност – за $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ такве да за различите j и k је $A_j \cap A_k = \emptyset$ важи $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

3˚ $P(B) + P(\overline{B}) = 1$ за свако $B \in \mathcal{A}$.

4˚ Из $C \subset B$ следи $P(C) \leq P(B)$.

5˚ $0 \leq P(B) \leq 1$ за свако $B \in \mathcal{A}$.

6˚ $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$.

7˚ Формула укључивања и искључивања

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} P(A_j A_k) + \sum_{1 \leq j < k < m \leq n} P(A_j A_k A_m) - \ldots + (-1)^n P(A_1 A_2 \ldots A_n).$$

8˚ Субадитивност или лема о прекривању

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

9˚ Непрекидност одозго:

Ако је $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ онда је $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ и непрекидност одоздо:

Ако је $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$ онда је $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Са неким од ових особина смо се већ сусрели када смо наводили основна својства вероватноће која су следила из класичне дефиниције вероватноће. Намеће нам се питање у каквој су вези аксиоматска и класична дефиниција вероватноће. Важи тврђење:

За класичну дефиницију вероватноће важе аксиоме вероватноће.

То се види из тога што на основу класичне дефиниције вероватноће важи:

1˚ За сваки случајан догађај А је $P(A) = \frac{k}{n} \geq 0$.

2˚ Сигуран догађај има вероватноћу $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$.

3˚ На основу последице својства 5 за дисјунктне догађаје А и В је $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Аксиоматика Колмогорова је непротивречна што значи да се коришћењем аксиома не могу доказати и неко тврђење и његова негација. Међутим, аксиоматика Колмогорова је непотпуна, односно из наведених аксиома се не може извести свако тврђење из теорије вероватноће.

Да бисмо показали непотпуност посматрајмо експеримент који се састоји од једног бацања новчића. Простор исхода је тада $\Omega = \{Г, П\}$, а поље догађаја је $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, B, \overline{B}\}$ где је $B = \{Г\}$ и $\overline{B} = \{П\}$. Ако ставимо $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$, $P(\Omega) = 1$ и $P(\emptyset) = 0$ (модел 1) уочавамо да су задовољене све аксиоме Колмогорова. Али, ако ставимо $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(\overline{B}) = \frac{2}{5}$, $P(\Omega) = 1$ и $P(\emptyset) = 0$ (модел 2), поново су задовољене све аксиоме Колмогорова. Провером лако утврђујемо да и сваки други модел одређен са $P(B) = \lambda$, где $0 \leq \lambda \leq 1$, $P(\overline{B}) = 1 - \lambda$, $P(\Omega) = 1$ и $P(\emptyset) = 0$ (модел 3) такође задовољава све аксиоме Колмогорова. Поставља се питање који од наведених модела описује реалност, односно који од њих одговара датом експерименту. Ако је новчић симетричан онда је то модел 1 и тада је $\lambda = \frac{1}{2}$ у моделу 3. У случајевима $\lambda \neq \frac{1}{2}$ новчићи у експериметима су несиметрични.

Одавде закључујемо да аксиоматика теорије вероватноће не даје правило по коме се датом случајном догађају В придружује вероватноћа P(B). Важно је само да при извршеном придруживању поступамо по правилима прописаним у аксиоматици и онда можемо на основу вероватноћа неких догађаја одређивати вероватноће других догађаја, који су од задатих сложенији по свом значењу и структури.

1.3. Условна вероватноћа

У случајним експериментима често се дешава да реализација једног догађаја има утицај на вероватноћу реализовања неког другог догађаја. Због тога је потребно дефинисати појам условне вероватноће.

Дефиниција: Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и нека је $A \in \mathcal{A}$ случајан догађај такав да је $P(A) > 0$ и $B \in \mathcal{A}$ произвољан случајан догађај. Вероватноћа реализовања догађаја B, под условом да се реализовао догађај A, је број $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ који означавамо са $P(B|A)$.

Теорема која следи нам показује да су и условне вероватноће вероватноће, односно да и за њих важе аксиоме теорије вероватноће.

<u>Теорема</u>: Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа, $A \in \mathcal{A}$ и $P(A) > 0$. Тада важи:

1° За свако $B \in \mathcal{A}$ је $P(B|A) \geq 0$;

2° $P(\Omega|A) = 1$;

3° За $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ и за све различите j и k је $B_j \cap B_k = \emptyset$ важи

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} B_n|A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n|A).$$

<u>Доказ</u>: 1° $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \geq 0$ јер је бројилац ненегативан, а именилац је позитиван.

2° $P(\Omega|A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$

3° $P(\cup_{n=1}^{\infty} B_n|A) = \frac{P(\cup_{n=1}^{\infty} Bn \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\cup_{n=1}^{\infty}(Bn \cap A))}{P(A)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(Bn \cap A)}{P(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n|A).$

Све особине вероватноће могу да се пренесу и на условне вероватноће. Неке од њих су:

1° $P(\emptyset|A) = 0.$

2° Из $C \subset B$ следи $P(C|A) \leq P(B|A)$.

3° $P(B|A) + P(\overline{B}|A) = 1$ за свако $B \in \mathcal{A}$.

4° $0 \leq P(B|A) \leq 1$ за свако $B \in \mathcal{A}$.

5° $P((B \cup C)|A) = P(B|A) + P(C|A) - P((B \cap C)|A).$

6° Ако $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ и за све $j \neq k$ је $A_j \cap A_k = \emptyset$ онда важи да је:

$$P((A_1 \cup \ldots \cup A_n)|A) = P(A_1|A) + \ldots + P(A_n|A).$$

1.4. Потпуна вероватноћа и Бајесова формула

Нека дисјунктни догађаји $H_1, H_2, \ldots, H_n$, $n \in \mathbb{N}$ чине *потпун систем догађаја*. Под тим подразумевамо да за све различите j и k, $1 \leq j \leq n$ и $1 \leq k \leq n$ важи да су догађаји H_j и H_k дисјунктни и да је $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$. Нека је A неки догађај из простора исхода Ω.

Вероватноће $P(H_i)$, $1 \leq i \leq n$ називамо *априорне вероватноће*, а вероватноће $P(A|H_i)$ називамо *апостериорне вероватноће*. Догађаје $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називамо *хипотезе*.

$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n))$

$P(A) = P((A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n))$, а према последици својства 5 важи:

$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \ldots + P(A \cap H_n)$

$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$.

Формулу $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$ називамо *формула потпуне вероватноће*.

Ако је познато да је експеримент изведен и да се остварио догађај A, онда се за свако j, $1 \leq j \leq n$, условна вероватноћа хипотезе H_j при услову A одређује формулом:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}.$$

Добијена формула се назива Бајесова формула. Доказао ју је енглески математичар Thomas Bayes (1701 – 1761). Ова формула је корисна ако посматрамо појаву за коју нисмо сигурни који од n могућих узрока је изазива. Помоћу ње можемо да одредимо вероватноћу да је неки од тих n могућих узрока заправо прави узрок посматране појаве.

Глава 2 . Примена вероватноће у различитим дисциплинама

2.1. Примери из свакодневног живота

Пример 1: Одредимо у ком односу треба поделити улог ако је у тренутку када је игра прекинута играчу А до победе недостајало три поена, а играчу B четири поена. Победа у некој од партија игре доноси играчу један поен. Сматра се да су играчи равноправни.

Решење: Ово је један од проблема о правилној подели улога којима су се бавили математичари Pierre de Fermat и Blaise Pascal. Они су сматрали да улог треба поделити сразмерно вероватноћама победа играча А и В у случају да се игра настави. До краја се може одиграти највише још $4 + 3 - 1 = 6$ партија те игре. Простор исхода зато има 2^6 елемената јер је у свакој од 6 потенцијално одиграних партија могао да победи један од играча, или А или В. Број повољних исхода за играча А је $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 42$ односно играч А побеђује када у низу од 6 потенцијално одиграних партија играч В победи редом у нула, једној, две или три партије. Аналогно се добија да је број повољних исхода за играча В једнак $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 22$. Одавде је вероватноћа да би у наставку игре победио играч А једнака $\frac{42}{64} = \frac{21}{32}$, док је вероватноћа да би победио играч В једнака $\frac{22}{64} = \frac{11}{32}$ одакле следи да улог треба поделити у односу 21 : 11.

Пример 2: По атлетској стази трчи шест подједнако успешних атлетичара чији су дресови означени бројевима 3, 5, 7, 11, 13 и 17. Одредимо вероватноћу:

а) догађаја А – да ће до циља први стићи атлетичар чији је дрес означен простим бројем,

б) догађаја В – да ће до циља први стићи атлетичар чији је дрес означен парним бројем.

Решење: Како су атлетичари подједнако успешни следи да је вероватноћа да сваки од њих први стигне до циља једнака $\frac{1}{6}$.

а) Како су сви дресови означени простим бројевима то увек на циљ први стиже атлетичар који има дрес означен простим бројем, односно то је сигуран догађај и зато је тражена вероватноћа једнака P(A) = 1.

б) Како су сви дресови означени непарним бројевима то је немогуће да на циљ први стигне атлетичар који има дрес означен парним бројем, односно то је немогућ догађај и зато је тражена вероватноћа једнака P(B) = 0.

<u>Пример 3</u>: Човек има 5 кључева од којих само један отвара врата на његовом стану. Кључеви су по форми слични па их он не разликује. Да би отворио врата он проба кључеве један за другим, а кључ за који је установио да не отвара врата ставља на страну да га не би поново испробавао. Колика је вероватноћа да ће му за отварање врата бити потребно 1, 2, 3, 4, 5 покушаја?

<u>Решење</u>: Иако ће човек прекинути даље испробавање када наиђе на исправан кључ, можемо замислити да се испробавање наставља до краја. Укупан број начина да се изврши испробавање свих пет кључева је 5!, а како се избор кључева врши насумице то су вероватноће за сваки од тих начина једнаке. Нека је A_i догађај да је човек отворио врата у i–том покушају, где $1 \leq i \leq 5$. Повољни исходи за догађај A_i су све пермутације код којих се исправан кључ налази на i–том месту, а њих има 4! одакле је $P(A_i) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$.

<u>Пример 4</u>: Одредимо вероватноћу да се из скупа свих пермутација бројева од 1 до 6 изабере она која не садржи ни пар 34 ни пар 56.

<u>Решење</u>: Означимо са A догађај да пермутација садржи пар 34, а са B догађај да пермутација садржи пар 56. Израчунајмо вероватноћу догађаја $\overline{A} \cap \overline{B}$.

На основу Де Моргановог закона из теорије скупова следи да је њему супротан догађај $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B$. На основу својства 5 важи $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Број свих пермутација бројева од 1 до 6 је број елемената простора исхода односно $|\Omega| = 6!$. Пермутацију бројева од 1 до 6 која садржи пар 34 можемо посматрати као пермутацију пара 34 и бројева 1, 2, 5, 6 па је онда број свих таквих пермутација $|A| = 5!$.

Аналогно томе добија се да је $|B| = 5!$ и $|A \cap B| = 4!$. Из претходног следи:

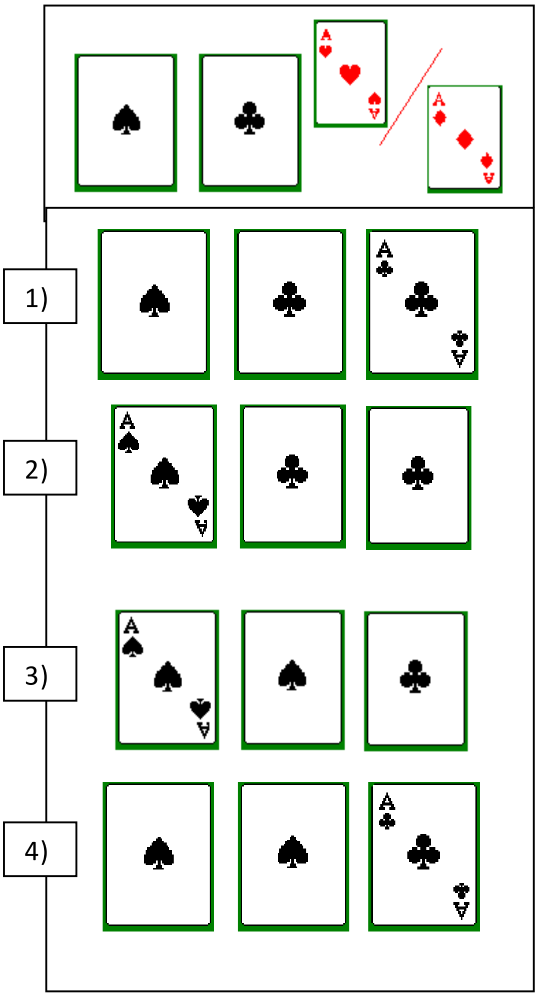
$P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{30}$ и $P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$.

Одавде је, према својству 4, тражена вероватноћа $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

<u>Пример 5</u>: Шпил се састоји од 52 карте.

а) Одредимо вероватноћу догађаја А да су међу три извучене карте бар један пик, бар један треф и тачно једна јединица.

<u>Решење</u>: У шпилу од 52 карте можемо издвојити четири групе од по 13 карата које на себи имају знакове херц, каро, пик или треф, а укупан број начина да се извуку три карте из шпила је $|\Omega| = \binom{52}{3}$. Разликујемо два догађаја A_1 и A_2.



Слика 1. Карте

Први догађај је да извучемо неке две карте пик и треф (које нису јединице) и јединицу херц или каро, а то се може урадити на $|A_1| = \binom{12}{1}\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{2}{1}$ начина.

Други догађај је да извучемо:

1) пик карту која није јединица и две треф карте од којих је једна јединица што се може урадити на $\binom{12}{1}\cdot\binom{12}{1}\cdot 1$ начина;
2) јединицу пик и две треф карте које нису јединица што се може урадити на $1\cdot\binom{12}{2}$ начина;
3) две пик карте од којих је једна јединица и једну треф карту која није јединица што се може урадити на $1\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{12}{1}$ начина;
4) две пик карте које нису јединица и једну јединицу треф што се може урадити на $\binom{12}{2}\cdot 1$ начина.

Одатле следи да је:

$$|A_2| = \binom{12}{1}\cdot\binom{12}{1}\cdot 1 + 1\cdot\binom{12}{2} + 1\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{12}{1} + \binom{12}{2}\cdot 1.$$

Тражена вероватноћа је $P(A) = \frac{|A_1|+|A_2|}{|\Omega|} = \frac{177}{5525}$.

б) Одредимо најмањи број карата који треба извући из датог шпила да би вероватноћа да међу њима буду бар две карте са истим бројем била већа од $\frac{1}{2}$.

<u>Решење</u>: Означимо тражени број карата са x, а са C догађај да ће међу x извучених карата бити бар две карте са истим бројем.

Тада је $\overline{C}$ догађај да ће свих x извучених карата бити означене различитим бројевима. Кардинални број скупа $\overline{C}$ је број начина да од 13 различитих бројева изаберемо x бројева који ће се јављати на тих x карата и да за сваку од тих x изабраних карата одредимо једну од четири могуће боје. Тада је $P(\overline{C}) = \frac{\binom{13}{x} \cdot 4^x}{\binom{52}{x}}$ зато што је $|\Omega| = \binom{52}{x}$ као број начина да се од 52 карте изабере x карата. Дакле, треба решити неједначину $P(C) \geq \frac{1}{2}$, а то је, на основу својства 4, еквивалентно са $1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{\binom{13}{x} \cdot 4^x}{\binom{52}{x}} \geq \frac{1}{2}$ односно са $\frac{\binom{13}{x} \cdot 4^x}{\binom{52}{x}} \leq \frac{1}{2}$. Коришћењем чињенице да је x природан број добија се да је x = 6 најмањи природан број за који важи $P(C) \geq \frac{1}{2}$.

Помоћу условне вероватноће може се дефинисати једна нова важна особина за случајне догађаје – *независност догађаја*. Догађај B је независан од догађаја A ако и само ако реализовање догађаја A не утиче на вероватноћу реализовања догађаја B, односно ако важи да је $P(B|A) = P(B)$ што се може написати у облику:

$P(AB) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. У противном догађај B зависи од догађаја A.

Пример 6: Тражећи одређену књигу студент је решио да обиђе три библиотеке. За сваку од библиотека подједнако је вероватно да у свом фонду има ту књигу или да је нема. Ако нека библиотека има ту књигу онда је подједнако вероватно да ју је узео неки други читалац или да није узета. Одредимо да ли је вероватније да ће студент добити књигу или да је неће добити.

Решење: Нека је A_i догађај да је студент добио књигу у i−тој библиотеци и A догађај да је студент добио књигу. Тада је $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. На основу формуле за условну вероватноћу важи да је $P(A_i) = P(B_i \cap C_i) = P(B_i) \cdot P(C_i|B_i)$, $1 \leq i \leq 3$ и где су B_i − догађај да i−та библиотека има тражену књигу у свом фонду и C_i догађај да у i−тој библиотеци тражена књига није издата. Следи да је $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{4}$. Како је $\overline{A} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$ и $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ представљају независне догађаје следи $P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1)\, P(\overline{A}_2)\, P(\overline{A}_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$. На основу својства 4 следи да је $P(A) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$ што значи да је вероватније да ће студент добити књигу.

<u>Пример 7</u>: Два играча наизменично бацају две коцке за игру. Побеђује онај играч чији збир добијених бројева на коцкама у неком бацању буде већи од пет и игра се тада завршава. Ако је збир добијених бројева једнак броју пет, игра се завршава као нерешена, а ако је збир добијених бројева мањи од пет, игра се наставља. Одредимо вероватноће догађаја: A − победио је играч који је започео игру, B − победио је други играч и C − игра је завршена нерешено.

<u>Решење</u>: При бацању две коцке за игру простор исхода је:

Ω = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66} односно $|\Omega| = 36$. Уведимо следеће ознаке:

− P_i је догађај да је у i–том бацању коцки збир добијених бројева на коцкама већи од пет. Тада је P_i = {15, 16, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66} и $|P_i| = 26$ и $P(P_i) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$. Први играч побеђује ако је i непаран број, односно други играч побеђује ако је i паран број.

− N_i је догађај да је у i–том бацању коцки збир добијених бројева пет односно да се игра завршава као нерешена. Тада је N_i = {14, 23, 32, 41} и $|N_i| = 4$ па је $P(N_i) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

− I_i догађај да је збир палих бројева у i–том бацању коцки мањи од пет односно да се игра наставља. Тада је I_i ={11, 12, 13, 21, 22, 31} и $|I_i| = 6$ па је $P(I_i) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Догађај A је скуп $A = \{P_1, I_1I_2P_3, I_1I_2I_3I_4P_5, \dots\}$ где је $I_1I_2...I_{2k-1}I_{2k}P_{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$ догађај да је након $2k + 1$ бацања коцки у последњем збир добијених бројева био већи, а у свим претходним бацањима мањи од пет. Следи да је $P(I_1I_2...I_{2k-1}I_{2k}P_{2k+1}) = P(I_1) \cdot ... \cdot P(P_{2k+1})$ зато што су $I_1, I_2, ... , I_{2k}$ и P_{2k+1} независни догађаји.

Одавде је $P(A) = \frac{13}{18} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{13}{18} + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{13}{18} + ... = \frac{13}{18} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 + ...\right) = \frac{13}{18} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{26}{35}$,

при чему сам користила формулу за суму бесконачне геометријске прогресије.

Аналогним разматрањем следи да је $B = \{I_1P_2, I_1I_2 I_3P_4, I_1I_2I_3I_4 I_5P_6, \dots\}$ одакле је:

$P(B) = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \frac{13}{18} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{13}{18} + ... = \frac{13}{18} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 + ...\right) = \frac{13}{18} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{26}{210} = \frac{13}{105}$ и

$C = \{N_1, I_1N_2, I_1I_2N_3, I_1I_2I_3N_4, \dots\}$ одакле је:

$P(C) = \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + ... = \frac{1}{9} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + ...\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

Пример 8: На једној полици се налази c црвених и p плавих предмета. Случајно се узима предмет са полице, а затим се враћа на полицу на коју се након сваког извлачења додаје j предмета извучене боје. Одредити вероватноћу догађаја A да од k извлачења предмета са полице у првих k_1 извлачења буде узет предмет црвене боје. Сви предмети су различити, а редослед извлачења није битан.

Решење: Означимо са B_i догађај да је у i–том извлачењу са полице узет црвени предмет. Тада је $P(B_1) = \frac{c}{c+p}$ и $P(B_2|B_1) = \frac{c+j}{c+p+j}$ зато што ће се, након што је у првом извлачењу узет предмет црвене боје, на полици налазити c + p + j предмета од којих треба да извучемо један од c + j црвених предмета. Вероватноћа догађаја $B_1 \cap B_2$ да су у прва два извлачења узета два предмета црвене боје је, на основу дефиниције условне вероватноће, једнака $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{c}{c+p} \cdot \frac{c+j}{c+p+j}$. Поступајући аналогно добијамо да је:

$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_{k_1}) = \frac{c}{c+p} \cdot \frac{c+j}{c+p+j} \cdot \frac{c+2\cdot j}{c+p+2\cdot j} \cdot \dots \cdot \frac{c+(k_1-1)\cdot j}{c+p+(k_1-1)\cdot j}$. Догађај A да је само у првих k_1 извлачења узет црвени предмет је $A = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k_1} \cap \overline{B_{k_1+1}} \cap \dots \cap \overline{B_k}$.

Тада је $P(A) = \frac{c}{c+p} \cdot \frac{c+j}{c+p+j} \cdot \frac{c+2\cdot j}{c+p+2\cdot j} \cdot \dots \cdot \frac{c+(k_1-1)\cdot j}{c+p+(k_1-1)\cdot j} \cdot \frac{p}{c+p+k_1\cdot j} \cdot \dots \cdot \frac{p+(k-k_1-1)\cdot j}{c+p+(k-1)\cdot j}$.

Пример 9: Из прве кутије у којој је било пет жутих и седам зелених куглица пребачене су у другу кутију (у којој је првобитно било десет жутих и петнаест зелених куглица) две куглице. Затим је из друге кутије изабрана једна куглица и додана у прву кутију из које је, након тога, извучена једна куглица. Одредити вероватноћу да је извучена куглица жута.

Решење: Уочимо да овде постоји шест различитих хипотеза ако посматрамо две куглице које су пребачене из прве у другу кутију и једну куглицу која је пребачена из друге у прву кутију. Нека су то следеће хипотезе:

H_1 – из прве кутије узете су две жуте, а додата је једна жута куглица;

H_2 – из прве кутије узете су две жуте, а додата је једна зелена куглица;

H_3 – из прве кутије су узете две зелене, а додата је једна жута куглица;

H_4 – из прве кутије су узете две зелене, а додата је једна зелена куглица;

H_5 – из прве кутије узета су по једна жута и зелена куглица, а додата је једна жута куглица;

H_6 – из прве кутије узете по једна жута и зелена куглица, а додата је једна зелена куглица.

Узимање две куглице из прве кутије и додавање једне куглице у другу кутију су зависни догађаји (од тога које смо две куглице из прве кутије ставили у другу кутију зависи на колико начина можемо изабрати једну куглицу одређене боје из друге кутије и ставити је у прву).

Следи да је $P(H_1) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} \cdot \frac{12}{27} = \frac{20}{297}$ где први разломак представља вероватноћу да из прве кутије узмемо две жуте куглице и пребацимо их у другу кутију, а други да се из друге кутије, у којој су тада дванаест жутих и петнаест зелених куглица, изабере једна жута куглица и пребаци у прву кутију у којој ће тада бити четири жуте и седам зелених куглица па је $P(A|H_1) = \frac{4}{11}$ где је А догађај да је, након пребацивања куглица, из прве кутије извучена куглица жуте боје.

$P(H_2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} \cdot \frac{15}{27} = \frac{25}{297}$ где први разломак представља вероватноћу да из прве кутије узмемо две жуте куглице и пребацимо их у другу кутију, а други да се из друге кутије, у којој су тада дванаест жутих и петнаест зелених куглица, изабере једна зелена и пребаци у прву кутију у којој ће тада бити три жуте и осам зелених куглица па је $P(A|H_2) = \frac{3}{11}$.

$P(H_3) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} \cdot \frac{10}{27} = \frac{35}{297}$ где први разломак представља вероватноћу да из прве кутије узмемо две зелене куглице и пребацимо их у другу кутију, а други да се из друге кутије, у којој су тада десет жутих и седамнаест зелених куглица, изабере једна жута и пребаци у прву кутију у којој ће тада бити шест жутих и пет зелених куглица па је $P(A|H_3) = \frac{6}{11}$.

Аналогним разматрањем добијамо да је:

$P(H_4) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} \cdot \frac{17}{27} = \frac{119}{594}$, $\quad P(A|H_4) = \frac{5}{11}$,

$P(H_5) = \frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{2}} \cdot \frac{11}{27} = \frac{35}{162}$, $\quad P(A|H_5) = \frac{5}{11}$,

$P(H_6) = \frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{2}} \cdot \frac{16}{27} = \frac{280}{891}$, $\quad P(A|H_6) = \frac{4}{11}$.

На основу формуле потпуне вероватноће важи да је:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \frac{20}{297} \cdot \frac{4}{11} + \frac{25}{297} \cdot \frac{3}{11} + \frac{35}{297} \cdot \frac{6}{11} + \frac{119}{594} \cdot \frac{5}{11} + \frac{35}{162} \cdot \frac{5}{11} + \frac{280}{891} \cdot \frac{4}{11} = \frac{370}{891}.$$

Пример 10: Пас једне породице је изгубљен након излета у једном парку. На основу досадашњег искуства са тим псом знамо да је вероватноћа да се пас вратио кући $\frac{1}{4}$, вероватноћа да пас лута негде у парку је $\frac{1}{2}$, а вероватноћа да је одлутао у шуму у близини парка је $\frac{1}{4}$. Дечак из породице који је био задужен да чува пса послат је да га тражи. Одредимо вероватноћу да ће дечак наћи пса ако је вероватноћа да ће га наћи ако је у парку 90%, ако је у шуми 50%, а ако је пас у кући дечак га неће наћи.

Решење: Уведимо следеће ознаке: A – догађај да ће дечак пронаћи пса, H_1 – догађај да се пас вратио кући, H_2 – догађај да пас лута негде у парку, H_3 – догађај да је пас одлутао у оближњу шуму. Тада важи да је:

$P(H_1) = \frac{1}{4}$, $P(H_2) = \frac{1}{2}$, $P(H_3) = \frac{1}{4}$, $P(A|H_1) = 0$, $P(A|H_2) = 90\% = \frac{9}{10}$ и $P(A|H_3) = 50\% = \frac{1}{2}$.

На основу формуле потпуне вероватноће тражена вероватноћа да ће дечак пронаћи пса једнака $P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{40}$.

Пример 11: Три аутомата пакују чачкалице у кутије од по сто чачкалица. Први аутомат пакује 20% кутија погрешно, други аутомат греши код паковања 10% кутија, док трећи исправно пакује 90% кутија. На првом аутомату пакује се 10% укупне производње, на другом 20%, а на трећем 70% укупне производње једне фабрике чачкалица.

Нађимо вероватноћу да насумице изабрана кутија чачкалица неће бити исправно напуњена. Ако је изабрана кутија исправно напуњена, нађимо вероватноћу да је пакована на првом, другом, односно на трећем аутомату. Одредимо на ком аутомату је изабрана кутија највероватније пакована.

Решење: Нека је A догађај да изабрана кутија неће бити исправно напуњена, а H_i хипотеза да је изабрана кутија напуњена на i–том аутомату где је $1 \leq i \leq 3$.

Како се на првом, другом и трећем аутомату производи редом 10%, 20% и 70% укупне производње може се закључити да је $P(H_1) = 10\% = \frac{1}{10}$, $P(H_2) = 20\% = \frac{1}{5}$, $P(H_3) = 70\% = \frac{7}{10}$.

Важи и да је $P(A|H_1) = 20\% = \frac{1}{5}$ зато што први аутомат погрешно пакује 20% кутија, $P(A|H_2) = 10\% = \frac{1}{10}$ зато што други аутомат погрешно пакује 10% кутија, а како трећи аутомат погрешно пакује 10% кутија следи да је $P(A|H_3) = 10\% = \frac{1}{10}$.

Тада је на основу формуле потпуне вероватноће:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{11}{100}.$$

Дакле, вероватноћа да изабрана кутија неће бити исправно напуњена је $\frac{11}{100}$.

Ако је $\overline{A}$ догађај да је насумице изабрана кутија исправно напуњена онда је још потребно одредити вероватноће $P(H_1|\overline{A})$, $P(H_2|\overline{A})$ и $P(H_3|\overline{A})$ и зато ћемо користити Бајесову формулу и својство вероватноће 4, одакле је $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{89}{100}$.

Користићемо особину 3 условне вероватноће да је $P(\overline{A}|H_j) = 1 - P(A|H_j)$. Ова особина се лако доказује коришћењем дефиниције условне вероватноће и својства вероватноће 4: $P(\overline{A}|H_j) = \frac{P(\overline{A} \cap H_j)}{P(H_j)} = \frac{P(\Omega \cap H_j) - P(A \cap H_j)}{P(H_j)} = 1 - P(A|H_j)$. На основу Бајесове формуле је:

$$P(H_1|\overline{A}) = \frac{P(H_1) \cdot P(\overline{A}|H_1)}{P(\overline{A})} = \frac{P(H_1) \cdot (1 - P(A|H_1))}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{10} \cdot (1 - \frac{1}{5})}{\frac{89}{100}} = \frac{8}{89};$$

$$P(H_2|\overline{A}) = \frac{P(H_2) \cdot P(\overline{A}|H_2)}{P(\overline{A})} = \frac{P(H_2) \cdot (1 - P(A|H_2))}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{5} \cdot (1 - \frac{1}{10})}{\frac{89}{100}} = \frac{18}{89};$$

$$P(H_3|\overline{A}) = \frac{P(H_3) \cdot P(\overline{A}|H_3)}{P(\overline{A})} = \frac{P(H_3) \cdot (1 - P(A|H_3))}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{7}{10} \cdot (1 - \frac{1}{10})}{\frac{89}{100}} = \frac{63}{89}.$$

Како је $P(H_3|\overline{A}) > P(H_2|\overline{A}) > P(H_1|\overline{A})$ то је случајно изабрана исправно напуњена кутија чачкалица највероватније пакована на трећем аутомату.

Када обрађујемо резултате астрономских посматрања, редовно се сусрећемо са проблемом да из неког скупа података треба да изведемо одређени закључак. Тај закључак може бити потврда или оповргавање неке тезе или одређивање неког физичког параметра.

<u>**Пример 12**</u>: Претпоставимо да смо конструисали детектор који са вероватноћом 1 може да детектује теоријски предвиђену честицу X која као саставни део космичког зрачења долази на Земљу са планета које су Земљиног типа. Међутим, постоји шанса од 1% да детектор одреагује на протон који долази на Земљу као регуларан део космичког зрачења. Честица X и протон се у космичком зрачењу јављају у односу 1:9999. Ако је детектор одреаговао, нађимо вероватноћу да је до њега стигла честица X са планете која је слична нашој, односно са планете Земљиног типа.

Решење: Нека су догађаји: А – детектор је одреаговао, H_1 – на детектор је пала честица X, а H_2 – на детектор је пао протон.

Тада је $P(H_1) = \frac{1}{10000}$, $P(H_2) = \frac{9999}{10000}$, $P(A|H_1) = 1$ и $P(A|H_2) = 1\% = \frac{1}{100}$. На основу Бајесове формуле, вероватноћа да је детектор одреаговао јер је до њега стигла честица X са планете сличне нашој је:

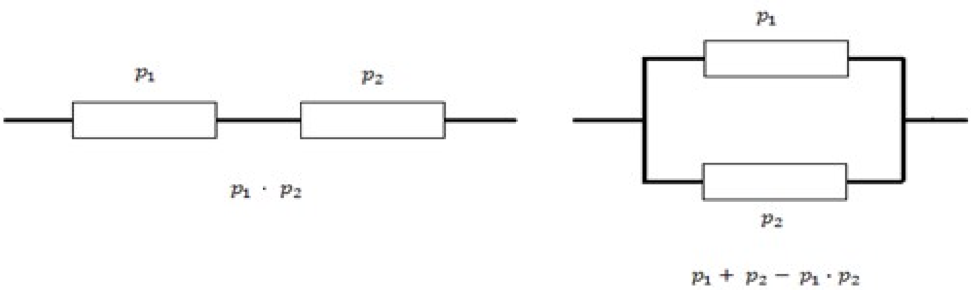
$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)} = \frac{\frac{1}{10000} \cdot 1}{\frac{1}{10000} \cdot 1 + \frac{9999}{10000} \cdot \frac{1}{100}} = \frac{100}{10099}.$$

Пример 13: Лутрија се састоји од n лозова од којих је k са добитком. Катарина и Милош желе да купе прва два лоза од свих лозова који су пуштени у продају. Договорили су се да прво Катарина бира један лоз, а после ње Милош. Одредимо ко од њих двоје има већу шансу за добитак.

Решење: Вероватноћа догађаја К да ће Катарина купити лоз са добитком је $P(K) = \frac{k}{n}$, док вероватноћу догађаја М да ће Милош купити лоз са добитком рачунамо користећи формулу потпуне вероватноће. Посматрајмо хипотезе H_1 – Катарина је купила лоз са добитком и H_2 – Катарина није купила лоз са добитком. Тада је $P(H_1) = \frac{k}{n}$, $P(H_2) = \frac{n-k}{n}$, $P(M|H_1) = \frac{k-1}{n-1}$ и $P(M|H_2) = \frac{k}{n-1}$, одакле је $P(M) = P(H_1) \cdot P(M|H_1) + P(H_2) \cdot P(M|H_2) = \frac{k}{n}$. Катарина и Милош имају једнаке шансе за добитак. Дакле, није битно када се купује лоз, важно је само колико има добитних лозова у продаји.

2.2. Теорија поузданости

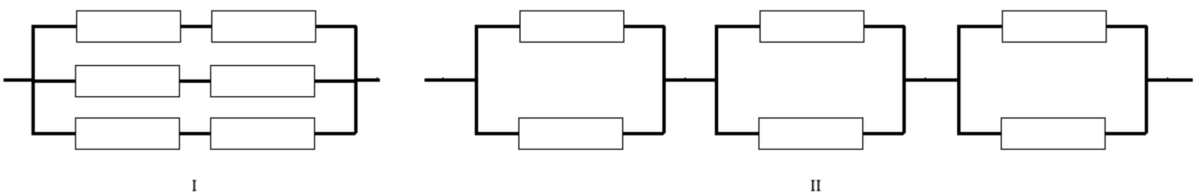
Теорија поузданости је научна дисциплина која се бави проучавањем законитости којих се треба придржавати при пројектовању, конструкцији, испитивању, производњи и експлоатацији техничких производа како би они имали што дужи радни век, а самим тим и максималан радни учинак. Поузданост неког уређаја дефинише се као вероватноћа да уређај ради исправно. Ако је систем састављен од компоненти, тада се његова поузданост може одредити ако су познате поузданости компоненти од којих је састављен. Често се може претпоставити да су догађаји „Прва компонента система је исправна”, „Друга компонента система је исправна”, ... , „N−та компонента система је исправна” независни, краће кажемо да су компоненте независне. Основни начини везе две независне компоненте су редна и паралелна веза.



Слика 2. Редна и паралелна веза

Код редне везе, систем од две независне компоненте ради ако и само ако обе компоненте раде, одакле је поузданост оваквог система једнака $p = p_1 \cdot p_2$. Код паралелне везе, систем од две независне компоненте не ради ако и само ако не раде обе компоненте, а одавде је $1 - p = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)$ па је поузданост оваквог система $p = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$.

<u>Пример 14</u>: Одредимо који од два система на слици има већу поузданост ако су компоненте независне и свака има поузданост p, где је $0 < p < 1$.



Слика 3. Системи I и II

Решење: Нека је p_1 поузданост првог система, а p_2 поузданост другог система. Тада први систем можемо посматрати као паралелну везу три компоненте од којих свака има поузданост p^2 (као редна веза две компоненте чија је поузданост p).

Следи да је $1 - p_1 = (1 - p^2)^3$ јер систем не ради ако и само ако ниједна компонента не ради. Сређивањем горње једнакости добијамо $p_1 = 3p^2 - 3p^4 + p^6$.

Други систем је еквивалентан редној вези од три компоненте од којих свака има поузданост $2p - p^2$ (као паралелна веза две компоненте чија је поузданост p), одакле следи да је $p_2 = (2p - p^2)^3 = 8p^3 - 12p^4 + 6p^5 - p^6$.

Како је $p_1 - p_2 = 2p^6 - 6p^5 + 9p^4 - 8p^3 + 3p^2 = p^2(p - 1)^2(2p^2 - 2p + 3) > 0$ јер је $0 < p < 1$ и важи да је $2p^2 - 2p + 3 > 0$. Дакле, систем I има већу поузданост од система II.

2.3. Модели природних језика

Велики број области рачунарства и вештачке интелигенције, као што су машинско превођење, издвајање информација, креирање и употреба експертских система, разумевање текста, препознавање и генерисање говора и сличне, почивају управо на техникама обраде природних језика. Аутоматско препознавање говора спада у највеће техничке изазове савременог доба и већ више од пола века заокупља пажњу истраживача широм света. Задатак аутоматског препознавања говора је да се говор преведе у текст, односно да се „препозна” шта је особа изговорила.

Одређивање излазне реченице на основу улазног сигнала није нимало једноставно. На пример, реченице „Стигли смо у Бар” и „Стигли смо у бар” ће звучати потпуно исто и није могуће само на основу улазног сигнала једнозначно одредити излаз. Уколико је човек тај који слуша и препознаје, он ће користити нека додатна знања о језику и свету који нас окружује како би одредио право значење изговорене реченице. Међутим, уколико је рачунар тај који треба да препозна изговорено, ситуација се знатно компликује.

Проблем препознавања говора, а и многи други слични проблеми, решавају се употребом вероватноће како би се формирао *модел природног језика* – интерпретација неког језика помоћу које рачунар одређује који је највероватнији излаз за дати улазни сигнал.

Наиме, циљ је израчунати вероватноћу P(реченица) = $\mathrm{P}(\text{реч}_1, \text{реч}_2, \text{реч}_3, \dots, \text{реч}_\mathrm{n})$ да ће се нека реченица или секвенца речи појавити у неком природном језику.

Овај проблем можемо посматрати и као проблем одређивања вероватноће следеће речи у реченици, када су познате претходне $\mathrm{P}(\text{реч}_5|\text{реч}_1, \text{реч}_2, \text{реч}_3, \text{реч}_4)$.

На пример, изговорена реченица „Покажи ми твој рад” могла би да приликом проласка кроз систем звучи као: „Покажи ми твој рад”, „Покажи ми твој град”, „Покажи ми твој јад”, ... Нека је L = {*покажи, ми, твој, рад, јад, ...*} скуп речи неког језика (или дела језика). Са L* обележићемо скуп свих могућих варијација елемената из L, односно:

L* = {*покажи, покажи ми, покажи ми твој, ми твој рад, покажи ми твој рад, покажи покажи ми*, ...}. Скуп L* има бесконачно много елемената. Међутим, нису сви његови елементи исправне реченичне конструкције. Неки елементи скупа L* ће се појављивати често у текстовима, неки од њих ће се појављивати ретко, а неки неће никада.

Приликом креирања модела, из неког унапред расположивог скупа текстова на природном језику, управо се на основу броја појављивања неке секвенце речи рачуна њена вероватноћа јављања. Ова информација се касније користи за одређивање највероватнијег излаза система. Дакле, циљ је одредити функцију P која задовољава следеће:

$\sum_{x \in L^*} \mathrm{P}(x) = 1, \mathrm{P}(x) \geq 0 \;\; \forall x \in L^*$, а на основу формуле условне вероватноће важи да је:

P(Покажи ми твој рад) = P(Покажи) · P(ми|Покажи) · P(твој|Покажи ми) · P(рад|Покажи ми твој).

Функција P се одређује полазећи од неког унапред познатог скупа текстова којим је машина „тренирана” односно који су скенирани и обрађени у рачунару.

Уколико бисмо покушали да интуитивно рачунамо вероватноће секвенци речи као:

$\mathrm{P}(\text{Покажи ми твој рад}|\text{Покажи ми твој}) = \dfrac{\text{бројПојављивања(Покажи ми твој рад)}}{\text{бројПојављивања(Покажи ми твој)}}$ било би пуно секвенци које се нису ни једном појавиле у тексту намењеном за тренирање система, а сасвим су исправне и могуће у неком језику.

Није могуће имати толико велики скуп текстова који би обухватио све могуће реченице неког језика. Због тога се користе Марковљеви модели. Њих је осмислио руски математичар Андреи Андреевич Марков (1856 – 1922).

Најједноставнији је униграм модел, који вероватноћу појављивања неке секвенце (реченичног дела) рачуна као производ вероватноћа појављивања речи те секвенце:

$$P(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i)$$

Ако пак вероватноћа појављивања неке речи у реченици зависи само од вероватноће појављивања прве речи која јој претходи такав модел називамо биграм. Тада важи:

$$P(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=2}^{n} P(x_i | x_{i-1})$$

где је $P(x_i | x_{i-1}) = \dfrac{\text{бројпојављивања}(x_{i-1},\ x_i)}{\text{бројпојављивања}(x_{i-1})}$ (*).

<u>Пример 15</u>: Нека су из великог броја текстова који се уносе при „тренирању" рачунара обрађене следеће речи приказане у две табеле на слици 4. Ознаке <s> и </s> означавају почетак и крај реченице.

	<s>	Ја	волим	да	једем	</s>
број јављања	1000	923	905	974	920	1000

	Ја	волим	да	једем	</s>
<s>	830	59	51	12	3
Ја	**0**	704	1	61	15
волим	**0**	**0**	253	**0**	23
да	21	57	1	721	1
једем	2	**0**	51	**0**	901

Слика 4. Табеле са неким речима скенираног текста

Решење: У првој табели приказане су појединачно неке речи из текста и њихов број јављања у тексту. У другој су приказани парови речи и њихов број јављања у тексту. Одредимо, на основу текстова унетих у рачунар, вероватноћу да ће се у српском језику појавити реченица „Ја волим да једем”.

Из формуле (*) следи да важи:

P(<s> Ја волим да једем </s>) = P(Ја|<s>)P(волим|Ја)P(да|волим)P(једем|да)P(</s>|једем) при чему је P(Ја|<s>) = $\frac{830}{1000}$, P(волим|Ја) = $\frac{704}{923}$, P(да|волим) = $\frac{253}{905}$, P(једем|да) = $\frac{721}{974}$, P(</s>|једем) = $\frac{901}{920}$. Одавде је P(<s> Ја волим да једем </s>) = 0.13.

На сличан начин можемо проширити модел на 3−граме, 4−граме, ... , n−граме, где су n−грами модели код којих вероватноћа јављања неке речи зависи од вероватноће појављивања n − 1 претходних речи. У пракси се заснивање модела језика на n−грамима показало као веома ефикасно.

Приликом моделовања природних језика, секвенци која није прочитана додељују се неке веома мале вероватноће јављања тако да је свака реченица вероватна, али оне које се не срећу често имају веома мале вероватноће.

Добар пример коришћења модела природних језика јесу различити преводиоци на интернету који генерешу највероватнију секвенцу страног језика као резултат превода унетог текста.

2.4. Телекомуникације

Потреба људи да комуницирају на даљину одувек је постојала. Због тога су људи на различите начине покушавали да успоставе контакт на даљину. Из тог времена потичу гласници, голубови писмоноше, димни сигнали, хелиограф, мегафон и многи други примитивни облици преношења информација на даљину. Данас се за пренос информација на даљину користе *телекомуникациони системи*. Основни задатак телекомуникационог система је да се порука у виду сигнала пренесе на удаљено место, а да при томе примљени сигнал што је могуће више одговара послатом сигналу. Сметње случајног карактера које утичу да корисни сигнал не стигне до пријемника у истом облику у ком је послат називају се *шумови*.

Пример 16: На улаз радарског уређаја долази мешавина корисног сигнала и шума са вероватноћом p, а са вероватноћом 1 – p долази само шум. Уређај региструје корисни сигнал са шумом са вероватноћом p_1, а са вероватноћом p_2 региструје само шум. Уређај је регистровао сигнал. Одредимо вероватноћу да је на улаз радарског уређаја дошао корисни сигнал са шумом.

Решење: Означимо са: A – догађај да је уређај регистровао сигнал, H_1 – хипотезу да је на улаз радарског уређаја стигао корисни сигнал са шумом, H_2 – хипотезу да је на улаз радарског уређаја стигао шум. Тада је $P(H_1) = p$, $P(H_2) = 1 - p$, $P(A|H_1) = p_1$ и $P(A|H_2) = p_2$. На основу Бајесове формуле, вероватноћа да је на улаз радарског уређаја стигао корисни сигнал са шумом је $P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)} = \frac{p\cdot p_1}{p\cdot p_1+(1-p)\cdot p_2}$.

Како би се повећала вероватноћа успешног преноса сигнала, поруке се често кодирају, односно, знакови поруке се представљају помоћу бинарних цифара 0 и 1.

Пример 17: Са једног предајника се шаљу сигнали 0 или 1 и то 0 са вероватноћом $\frac{48}{100}$ и 1 са вероватноћом $\frac{52}{100}$. При преносу се јављају и шумови што доводи до тога да се 0 пренесе као 1 са вероватноћом $\frac{1}{10}$ и да се 1 пренесе као 0 са вероватноћом $\frac{1}{5}$. Одредимо вероватноћу пријема исправног сигнала као и вероватноћу да је 0 која је пренета стварно и послата.

Решење: Означимо са: А – догађај да је пренет исправан сигнал, В – догађај да је пренета 0, H_0 – хипотеза да је са предајника послата 0, H_1 – хипотеза да је са предајника послата 1. Тада је $P(H_0) = \frac{48}{100}$, $P(H_1) = \frac{52}{100}$. Како се 0 преноси као 1 са вероватноћом $\frac{1}{10}$ следи да је вероватноћа да ће се 0 пренети исправно $P(A|H_0) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$, а како се 1 преноси као 0 са вероватноћом $\frac{1}{5}$ следи да је вероватноћа да ће се 1 исправно пренети $P(A|H_1) = \frac{4}{5}$.

На основу формуле потпуне вероватноће вероватноћа пријема исправног сигнала је:

$P(A) = P(H_0) \cdot P(A|H_0) + P(H_1) \cdot P(A|H_1) = \frac{48}{100} \cdot \frac{9}{10} + \frac{52}{100} \cdot \frac{4}{5} = \frac{106}{125}$ и

$P(B) = P(H_0) \cdot P(B|H_0) + P(H_1) \cdot P(B|H_1) = P(H_0) \cdot P(A|H_0) + P(H_1) \cdot (1 - P(A|H_1))$

$P(B) = \frac{48}{100} \cdot \frac{9}{10} + \frac{52}{100} \cdot \frac{1}{5} = \frac{67}{125}$, а вероватноћа да је примљена 0 која је стварно и послата је, на основу Бајесове формуле, једнака $P(H_0|B) = \frac{P(H_0) \cdot P(B|H_0)}{P(B)} = \frac{\frac{54}{125}}{\frac{67}{125}} = \frac{54}{67}$.

Пример 18: Бинарна порука се преноси кроз комуникациони канал. Због разних сметњи које се јављају у виду шумова, у 20% случајева у просеку, 0 се пренесе као 1 и обрнуто. Да би се смањила могућност грешке, 0 се преноси као 000, а 1 се преноси као 111, па се на месту пријема декодира по принципу већинских знакова (001 као 0, 101 као 1). Одредимо вероватноћу исправног преноса једне нуле.

Решење: Означимо са: А – догађај да је нула исправно пренета и A_i – догађај да је i−та нула у низу од три цифре исправно пренета, где $1 \leq i \leq 3$. Како је 20% преноса лоше пренето следи да је $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$.

Догађај А је скуп $A = \{A_1A_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3\}$ где је:

$A_1A_2A_3$ − догађај да су све три нуле у низу исправно пренете,

$\overline{A}_1A_2A_3$ − догађај да је прва нула погрешно пренета, а остале нуле су исправно пренете,

$A_1\overline{A}_2A_3$ − догађај да је друга нула погрешно пренета, а остале нуле су исправно пренете,

$A_1A_2\overline{A}_3$ − догађај да је трећа нула погрешно пренета, а остале нуле су исправно пренете.

Догађаји A_1, A_2 и A_3 су међусобно независни па је $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{64}{125}$. Аналогно је $P(\overline{A}_1A_2A_3) = P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{16}{125}$, $P(A_1\overline{A}_2A_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) = \frac{16}{125}$, $P(A_1A_2\overline{A}_3) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) = \frac{16}{125}$ и $P(A) = \frac{64}{125} + 3 \cdot \frac{16}{125} = \frac{112}{125}$.

2.5. Наслеђивање крвних група

ABO систем крвних група откривен је почетком двадесетог века. Тада је утврђено да свака особа има једну од четири крвне групе A, B, AB или O.

Систем је под контролом једног гена – наследне јединице која има два од три могућа облика A, B и O. То значи да постоји шест различитих типова гена: AA, AO, BB, BO, AB и OO. Гени AA и AO одређују A крвну групу, BB и BO одређују B крвну групу, AB одређује AB крвну групу, а OO одређује нулту крвну групу O. Праћењем ових крвних група смањује се ризик да организам пацијента одбаци донирану крв.

<u>Пример 19</u>: Мајка има A, а отац B крвну групу. Одредити могуће крвне групе потомака и вероватноћу њиховог јављања.

<u>Решење</u>: Мајка има A крвну групу што значи да је њен ген типа AA или AO, а очев BB или BO. Нека су догађаји: H_1 – мајка има ген типа AA, а отац BB; H_2 – мајка има ген типа AA, а отац BO; H_3 – мајка има ген типа AO, а отац BB и H_4 – мајка има ген типа AO, а отац BO. Дете наслеђује по један облик гена од сваког родитеља па тако дете може имати по четири типа гена у сваком од догађаја H_1, H_2, H_3 и H_4 од којих неки могу бити исти.

	мајка отац	дете	
H_1	AA BB	AB, AB, AB, AB	$P(AB \mid H_1)=\frac{4}{4}=1$ $P(A \mid H_1)=0$ $P(B \mid H_1)=0$ $P(O \mid H_1)=0$
H_2	AA BO	AB, AO, AB, AO	$P(AB \mid H_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $P(A \mid H_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $P(B \mid H_2)=0$ $P(O \mid H_2)=0$
H_3	AO BB	AB, AB, BO, BO	$P(AB \mid H_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $P(A \mid H_3)=0$ $P(B \mid H_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $P(O \mid H_3)=0$
H_4	AO BO	AB, AO, BO, OO	$P(AB \mid H_4)=\frac{1}{4}$ $P(A \mid H_4)=\frac{1}{4}$ $P(B \mid H_4)=\frac{1}{4}$ $P(O \mid H_4)=\frac{1}{4}$

Слика 5. Наслеђивање крвних група

Како су сва четири случаја H_1, H_2, H_3 и H_4 равноправна, вероватноћа сваког од њих је $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}$.

Нека је P(A) вероватноћа да дете има A крвну групу, P(B) вероватноћа да дете има B крвну групу, P(AB) вероватноћа да дете има AB крвну групу и P(O) вероватноћа да дете има O крвну групу.

На основу формуле потпуне вероватноће следи да је:

$P(AB) = P(H_1)P(AB|H_1) + P(H_2)P(AB|H_2) + P(H_3)P(AB|H_3) + P(H_4)P(AB|H_4)$

$P(AB) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$

Аналогно томе је $P(A) = \frac{3}{16}$, $P(B) = \frac{3}{16}$ и $P(O) = \frac{1}{16}$ одакле се може закључити да је највероватније да ће дете имати AB крвну групу.

2.6. Наслеђивање болести

Посматрајмо сада болест српаста анемија (крвни поремећај чија је одлика да су еритроцити у облику српа) која се јавља код афричких становника и одређена је облицима гена A и a. Српаста анемија се јавља код оних афричких становника који имају типове гена AA и Aa, док становници који имају тип гена aa не обољевају од ове болести. Особе које имају српасту анемију и тип гена Aa имају лакши облик ове болести и отпорне су на маларију. Зато желимо да одредимо учесталост типова гена AA, Aa и aa у популацији.

Ако је популација довољно велика и нису присутни фактори који ремете генетичку равнотежу популације, можемо примењивати *Харди – Вајнбергов принцип* кога су открили енглески математичар Godfrey Harold Hardy и немачки лекар Wilhelm Weinberg. Овај принцип је веома популаран у популационој генетици.

На основу Харди – Вајнберговог принципа, ако знамо учесталост облика гена A и a који се јављају код родитеља, можемо израчунати учесталост типова гена AA, Aa и aa који се јављају код потомака. Претпоставимо да је учесталост облика гена A једнака p. Тада је учесталост облика гена a једнака $q = 1 - p$. Одавде је учесталост типа гена AA једнака p^2, типа гена Aa $2 \cdot p \cdot q$, а типа гена aa q^2 као што је приказано у табели на слици 6.

	p A	q a
A p	AA p^2	Aa $p \cdot q$
a q	Aa $p \cdot q$	aa q^2

Слика 6. Харди – Вајнбергов принцип

<u>Пример 20</u>: Ако је 9% популације у Африци рођено са тежим обликом српасте анемије, одредимо колики проценат популације је отпоран на маларију и има лакши облик српасте анемије.

<u>Решење</u>: На основу Харди – Вајнберговог принципа важи да је $P(AA) = p^2 = 9\% = 0.09$ одакле следи да је $p = 0.3$ и $q = 1 - p = 1 - 0.3 = 0.7$, па је тражени проценат популације који има лакши облик српасте анемије и који је отпоран на маларију једнак:

$P(Aa) = 2 \cdot p \cdot q = 2 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 0.42 = 42\%$.

Бајесова формула се често примењује у медицини зато што су лекарима познати симптоми болести, а када им се пацијент пожали, њихов задатак је да на основу изложених симптома одреде од које болести пацијент болује.

<u>Пример 21</u>: При обради симптома пацијента X сумња се на две болести које се у том месту јављају са вероватноћом $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$. Ради прецизирања одређене дијагнозе обавља се претрага на пацијенту чији су резултати позитивна или негативна реакција. У случају прве болести вероватноћа позитивне реакције је $\frac{9}{10}$, а негативне $\frac{1}{10}$, а у случају друге болести вероватноће позитивне и негативне реакције су по $\frac{1}{2}$. Резултати две независне претраге на пацијенту X су две негативне реакције. Наћи болест од које пацијент вероватније болује.

<u>Решење</u>: Означимо са: A – догађај да су резултати претраге над пацијентом две негативне реакције, H_1 – догађај да је пацијент оболео од прве болести, H_2 – догађај да је пацијент оболео од друге болести.

Тада је $P(H_1) = \frac{3}{5}$, $P(H_2) = \frac{2}{5}$, $P(A|H_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ и $P(A|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

На основу Бајесове формуле је:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{100} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{3}{53} \text{ и}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{100} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{50}{53}$$

одакле следи да је вероватније да пацијент болује од друге болести.

2.7. Парадокс о три затвореника

Три затвореника су обавештена да ће један од њих бити пуштен из затвора, а друга два ће бити задржана. Један од њих, затвореник А, моли чувара да му каже који ће од преостале двојице бити задржан на тај начин што ће му рећи име затвореника В ако ће затвореник С бити пуштен, име затвореника С ако ће В бити пуштен, и име или затвореника В или затвореника С ако ће он бити пуштен. Чувар му одговара именом затвореника В тврдећи да му тиме не одаје вредну информацију о његовој судбини. Затвореник А је срећан јер сматра да му се тиме вероватноћа да ће бити пуштен из затвора која је била $\frac{1}{3}$ повећала на $\frac{1}{2}$ јер је сада А један од двојице који могу да буду пуштени из затвора. Одредимо ко је од њих двојице у праву.

Чувар је у праву јер је вероватноћа да ће затвореник А бити пуштен из затвора једнака $\frac{1}{3}$ и након његовог одговора.

Закључак и дискусија

Као што се може закључити, теорија вероватноће је својом неизмерно широком употребом заслужила место међу водећим дисциплинама данашњице. Само изучавање ове области као засебне дисциплине захтева много времена и рада делом због њених многобројних примена, а делом и због тешког проналажења одговарајуће литературе.

Рад указује на велике могућности даљег истраживачког рада на овом подручју, јер је ово грана математике која ће се у будућности са развитком технологије све више развијати и имати све већу практичну примену и у другим дисциплинама.

Захвалност

Захваљујем се својој менторки Гордани Ћетковић на помоћи у одабиру литературе и подршци приликом израде рада.

Литература

[1.] Ј. Малишић, *Вероватноћа и математичка статистика*, Круг, Београд, 1999;

[2.] М. Меркле, *Вероватноћа и статистика*, Академска мисао, Београд, 1999;

[3.] S. M. Ross, *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, Academic Press, 2004;

[4.] M. Denny, S. Gaines, *Chance in Biology: Using Probability to Explore Nature*, Princeton University Press, 2011;

[5.] S. Miler, *Probability and Random Processes*, Academic Press, 2012;

[6.] D. Jurafsky, M.H. James, *Speech and Language Processing: An Introduction to Natural Language processing, Speech Recognition and Computational Linguistics*, Prentice Hall, 2009.